«Теория принятия решений»

Тема 4. **Оптимизация решений**

Лекция. **Линейное программирование**

Цель: Показать сущность задач линейного программирования и дать основные методы их решения.

Время - 4 часа

Учебные вопросы:
1. *Постановка задачи линейного программирования*
2. *Графическое решение задач линейного программирования*
3. *Симплекс-метод решения задач линейного программирования*

Введение. Линейное программирование послужило основой для разработки других математических методов, например целочисленного, стохастического и нелинейного программирования. После нескольких десятилетий глубоких разработок, практической реализации и критического анализа результатов применение методов линейного программирования привело к значительным успехам в решении широкого круга задач, относящихся к таким сферам, как промышленное производство, военное дело, сельское хозяйство, экономические исследования, транспорт, здравоохранение, а также психология и социальные науки.

1. Постановка задачи линейного программирования

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) математически может быть сформулирована следующим образом:

максимизировать (или *минимизировать*) $x_0 = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j (\leq, \ = \text{ или } \geq) \ b_i \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Экономическая интерпретация задачи, охватывающая широкий круг приложений, состоит в следующем. Моделируемая система характеризуется наличием нескольких видов «производственной деятельности» j (j=1,...,r), для осуществления которых требуются имеющиеся в ограниченном количестве ресурсы b_{ii}, i=1,...,m. Расход i-го ресурса на единицу продукта производственной деятельности равен a_{ij}. В свою очередь при таком потреблении результат j-го вида производственной деятельности для единицы соответствующего продукта (удельная стоимость или прибыль) характеризуется величиной c_j.

Цель построения модели состоит в определении уровней (объемов производства) каждого вида производственной деятельности x_j, при которых оптимизируется (максимизируется или минимизируется) общий результат производственной деятельности системы в целом без нарушения ограничений, накладываемых на использование ресурсов. Функцию x_0 называют *целевой функцией*, а лимиты потребления ресурсов - *ограничениями*.

Пример. Предприятие изготавливает два вида красок: для внутренних (1) и наружных (2) работ. Продукция поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта А и В. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов - 6 и 8 т соответственно. Расходы А и В на 1 т краски каждого типа приведены в таблице.

Исходный продукт	**Расход продукта на тонну краски**		**Максимальный запас**
	Краска 1	**Краска 2**	

A	2	1	6
B	1	2	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 1 не превышает спроса на краску 2 более чем на 1 тонну. Также установлено, что спрос на краску 1 не превышает 2 тонн в сутки. Оптовые цены красок: краска 1 - $2000, краска 2 - $3000.

Какое количество краски каждого вида необходимо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Построение математической модели. Первоначально необходимо определить следующие важные компоненты модели:

1) переменные (искомые величины) модели;

2) ограничения, налагаемые на переменные;

3) цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному решению.

Словесно это можно выразить так

Требуется определить *объемы производства* каждой из красок, *максимизирующие* доход от реализации продукции, с учетом *ограничений* на спрос и расход исходных материалов.

Переменные:

x_1 - суточный объем производства краски 1,

x_2 - суточный объем производства краски 2,

Целевая функция:

Максимизировать суммарный доход от продажи краски1 и 2

max $z = 2x_1+3x_2$.

Ограничения:

Ограничение на расход исходных продуктов:

$2x_1+ \; x_2 \le 6$ (для А);

$x_1+ 2x_2 \le 8$ (для В).

Ограничения на величину спроса на продукцию:

$x_1-x_2 \le 1$;

$x_1 \le 2$.

Ограничения на знак переменных (условие неотрицательности):

$x_1 \ge 0$;

$x_2 \ge 0$.

Таким образом, **математическая модель** записывается в виде:

Определить суточные объемы производства краски 1 (x_1) и краски 2 (x_2), при которых достигается

max $z = 3x_2+ 2x_1$ (целевая функция)

при

$$\left.\begin{aligned} x_2+2x_1 &\le 6\\ 2x_2+x_1 &\le 8\\ -x_2+x_1 &\le 1\\ x_1 &\le 2\\ x_1 &\ge 0\\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(ограничения).}$$

2. Графическое решение задач линейного программирования

Поскольку модель содержит только две переменные, задачу можно решить графически. В случае трех переменных графическое решение становится менее наглядным, а при большем числе переменных - даже невозможным. Несмотря на это, графическое решение позволит сделать некоторые выводы, которые лежат в основе общего метода решения задачи линейного программирования.

Первый шаг при использовании графического метода заключается в геометрическом представлении допустимых решений, то есть построении области допустимых решений, в которой одновременно удовлетворяются все ограничения модели (рис.1).

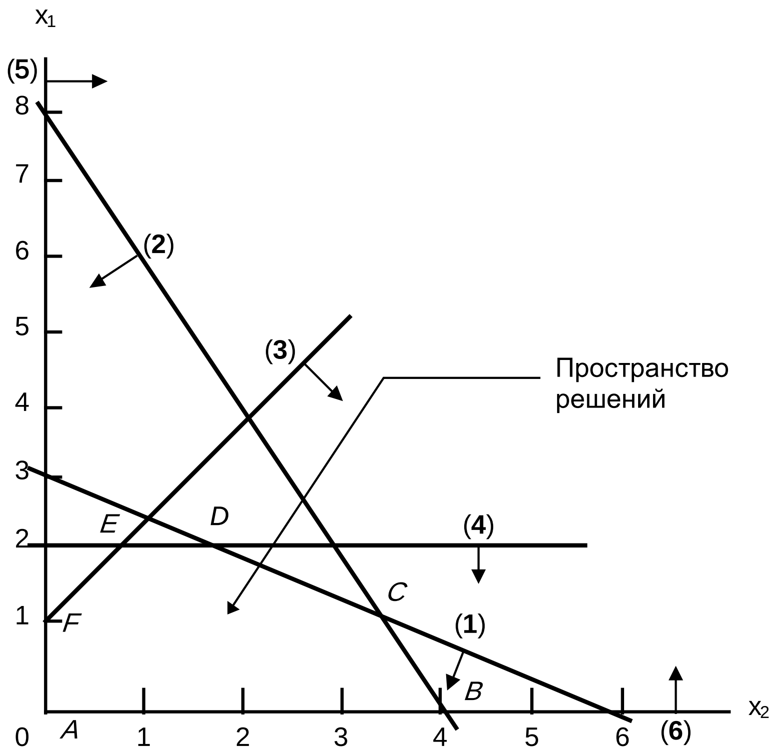

Рис.1. Ограничения: $x_2 + 2x_1 \le 6$ (**1**), $2x_2 + x_1 \le 8$ (**2**), $-x_2 + x_1 \le 1$ (**3**), $x_1 \le 2$ (**4**), $x_1 \ge 0$ (**5**), $x_2 \ge 0$ (**6**)

Полученное пространство решений - многоугольник *ABCDEF*. В каждой точке, принадлежащей внутренней области или границам *многоугольника решений ABCDEF*, все ограничения выполняются, поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются *допустимыми*. Пространство решений содержит бесконечное число таких точек, но несмотря на это, можно найти оптимальное решение, если выяснить, в каком направлении возрастает целевая функция модели $z = 3x_2 + 2x_1$. На рис. 2 показано, как осуществляется эта операция.

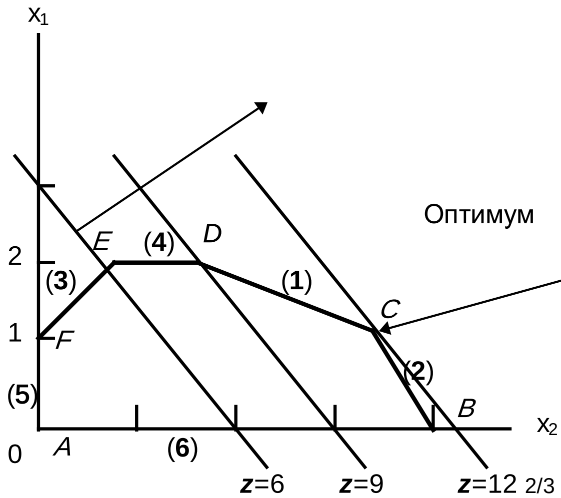

Рис.2. *Целевая функция*: max $z = 3x_2 + 2x_1$.
Оптимальное решение: $x_2 = 3^1/_3$ *т*, $x_1 = 1^1/_3$ *т*, $z = 12^2/_3$ тыс. долл.

На график наносят ряд параллельных линий, соответствующих уравнению *целевой функции* при нескольких произвольно выбранных и последовательно возрастающих значениях z, что позволяет определить наклон целевой функции и направление, в котором происходит ее увеличение (возрастание общего дохода).

Чтобы найти оптимальное решение, следует перемещать прямую, характеризующую целевую функцию, в направлении возрастания до тех пор, пока она не сместится в область недопустимых решений. На рис.2 показано, что оптимальному решению соответствует точка *C*. Так как она является точкой пересечения прямых (**1**) и (**2**). Значения $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_1$ в этой точке определяются решением следующей системы уравнений:

$$\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_1 = 6,$$

$$2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1 = 8.$$

Решение указанной системы уравнений дает следующий результат: $\boldsymbol{x}_2 = 3^1/_3$, $\boldsymbol{x}_1 = 1^1/_3$. Полученное решение означает, что суточный объем производства краски 2 должен быть равен $3^1/_3$ т, а краски 1 - $1^1/_3$ т. Доход, получаемый в этом случае, составит

$$\boldsymbol{z} = 3\times3^1/_3 + 2\times1^1/_3 = 12^1/_3 \text{ тыс. долл.}$$

3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Использование графического способа удобно только при решении задач линейного программирования с двумя переменными. При большем числе переменных необходимо применение алгебраического аппарата. Общий метод решения задач линейного программирования называется **симплекс-методом**.

Процесс решения задачи линейного программирования симплекс-методом носит **итерационный** характер: однотипные вычислительные процедуры в определенной последовательности повторяются до получения оптимального решения. Симплекс-метод - это характерный пример итерационных вычислений, используемых при решении оптимизационных задач. Ручное решение является трудоемким и процедуры, реализуемые в рамках симплекс-метода, требуют применения компьютерных технологий. Поэтому целесообразно рассмотреть саму идею метода и вычислительный алгоритм для его реализации.

Для построения общего метода решения задач линейного программирования соответствующие модели должны быть представлены в некоторой форме, которую называют **стандартной формой** линейных оптимизационных моделей. При стандартной форме линейной модели

1) все ограничения записываются в виде равенств с неотрицательной правой частью;

2) значения всех переменных модели неотрицательны;

3) целевая функция подлежит макисмизации или минимизации.

Анализ графического метода решения задач линейного программирования показывает, что оптимальному решению соответствует одна из *угловых* (*экстремальных*) точек пространства решений. Именно этот результат и положен в основу симплекс-метода.

Симплекс-метод не обладает наглядностью, которая характерна для геометрического представления пространства решений. В его вычислительной схеме реализуется упорядоченный процесс, при котором, начиная с некоторой *допустимой* угловой точки (обычно начала координат), осуществляются последовательные переходы от одной *допустимой* экстремальной точки к другой до тех пор, пока не будет найдена точка, соответствующая оптимальному решению.

Общую идею симплекс метода целесообразно продемонстрировать на рассматриваемом примере. Пространство решений этой задачи представлено на рис.3.

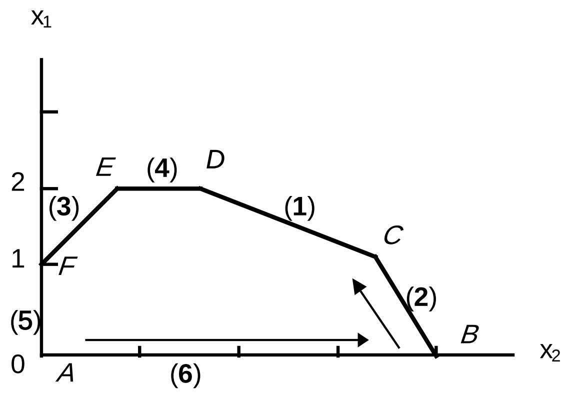

Рис.3

Исходной точкой алгоритма является начало координат (точка *A*), а решение, соответствующее этой точке называется **начальным решением**. От исходной точки осуществляется переход к некоторой **смежной угловой точке**. В рассматриваемом случае это может быть либо точка *B*, либо точка *F*. Выбор точки зависит от коэффициентов целевой функции. Так как коэффициент при $\boldsymbol{x}_2$ больше коэффициента при $\boldsymbol{x}_1$, а целевая функция подлежит *максимизации*, требуемое направление перехода соответствует увеличению $\boldsymbol{x}_2$, что приводит к экстремальной точке *B*. После этого указанный процесс повторяется, чтобы выяснить, существует ли другая экстремальная точка, соответствующая лучшему допустимому решению (в данном случае - большему значению целевой функции)Используя, как и ранее, информацию о целевой функции, можно определить, имеется ли на данном шаге алгоритма такая точка. В результате такой итеративный процесс позволяет найти оптимальную угловую точку *C*.

Выбор каждой последующей экстремальной точки при использовании симплекс-метода определяется следующими двумя правилами:

1) каждая *последующая* угловая точка должна быть *смежной* к предыдущей;

2) обратный переход к предшествующей экстремальной точке не проводится .

Таким образом, отыскание оптимального решения начинается с некоторой допустимой угловой точки, и все переходы осуществляются только к смежным точкам, причем перед новым переходом каждая из полученных точек проверяется на оптимальность.

Чтобы описать рассмотренные процедуры формальными средствами, необходимо определить пространство решений и угловые точки алгебраически. Требуемые соотношения устанавливаются в таблице соответствия геометрических и алгебраических определений.

Геометрическое определение (графический метод)	**Алгебраическое определение (симплекс-метод)**
Пространство решений Угловые точки	Ограничения модели стандартной формы Базисные решения задачи в стандартной форме

Представление пространства решений с помощью алгебраических методов. Целесообразно рассмотреть на примере. Соответствующая линейная модель, приведенная к стандартной форме имеет вид:

$$\max \boldsymbol{z} = 3\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{s}_1 + 0\boldsymbol{s}_2 + 0\boldsymbol{s}_3 + 0\boldsymbol{s}_4$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{s}_1 &= 6\\
2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{s}_2 &= 8\\
-\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{s}_3 &= 1\\
\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{s}_4 &= 2\\
\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4 &\geq 0.
\end{aligned}$$

На рис. 4 представлено пространство решений данной задачи.

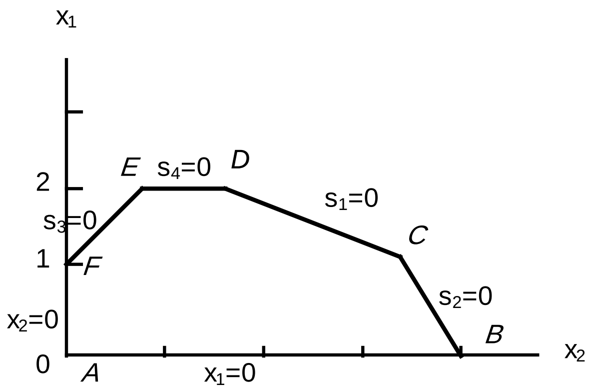

Рис.4

Каждую точку этого пространства можно определить с помощью переменных $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_3$, $\boldsymbol{s}_4$, фигурирующих в модели стандартной формы Для идентификации нужной точки пространства решений воспользуемся тем, что при $\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{i}$ =1,2,3,4, ограничения модели эквивалентны равенствам, которые представляются соответствующими ребрами пространства решений. Например, при $\boldsymbol{s}_1$=0 первое ограничение задачи принимает вид $\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_1=6$, которое представляется ребром *CD*. Увеличение переменных $\boldsymbol{s}_i$, ($\boldsymbol{i}$ >0) будет соответствовать смещению точек с границ пространства решений в его внутреннюю область.

Анализируя рис 4, можно заметить, что переменные $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_3$, $\boldsymbol{s}_4$, ассоциированные с экстремальными точками *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F*, можно упорядочить, исходя из того, какое значение (нулевое или ненулевое) имеет данная переменная в экстремальной точке.

Экстремальная точка	**Нулевые переменные**	**Ненулевые переменные**
A	$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_3$, $\boldsymbol{s}_4$
B	$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{s}_2$	$\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_3$, $\boldsymbol{s}_4$
C	$\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$	$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{s}_3$, $\boldsymbol{s}_4$
D	$\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_4$	$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_3$
E	$\boldsymbol{s}_3$, $\boldsymbol{s}_4$	$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$
F	$\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{s}_3$	$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_4$

Анализируя таблицу, легко заметить две *закономерности*:

1. Стандартная модель содержит четыре уравнения и шесть неизвестных, поэтому в каждой из экстремальных точек две (2=6-4) переменные должны иметь нулевые значения.

2. *Смежные* экстремальные точки отличаются только одной переменной в каждой группе (нулевых и ненулевых переменных).

Первая закономерность свидетельствует о возможности определения экстремальных точек алгебраическим способом путем приравнивания нулю такого количества переменных, которое равно разности между количеством неизвестных и числом уравнений. В этом состоит сущность свойства *однозначности* экстремальных точек. Каждой *не*экстремальной точке соответствует не более одной нулевой переменной. А любая точка внутренней области пространства решений вообще не имеет ни одной нулевой переменной, а любая *не*экстремальная точка, лежащая на границе, всегда имеет лишь одну нулевую переменную.

Свойство однозначности экстремальных точек позволяет определять их алгебраически. Будем считать, что линейная модель стандартной формы содержит $\boldsymbol{m}$ уравнений и $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}\leq m$) неизвестных (правые части ограничений - неотрицательные). Тогда все допустимые экстремальные точки определяются как *все* однозначные неотрицательные решения системы $\boldsymbol{m}$ уравнений, в которых $\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{m}$ переменных равны нулю.

Однозначные решения такой системы уравнений, получаемые путем приравнивания к нулю ($\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{m}$) переменных, называются **базисными решениями**. Если базисное решение удовлетворяет требованию неотрицательности правых частей, оно называется **допусти-**

мым базисным решением. переменные, имеющие нулевое значение, называются **небазисными переменными**, остальные - **базисными переменными**.

Вторая из отмеченных закономерностей оказывается полезной для построения вычислительных процедур симплекс-метода, при реализации которого осуществляется последовательный переход от одной экстремальной точки к другой, смежной с ней. Так как смежные точки отличаются только одной переменной, можно найти смежную экстремальную точку путем замены одной из текущих небазисных (нулевых) переменных текущей базисной переменной.

Пусть при решении нашей задачи получено решение, соответствующее точке *A*, откуда следует осуществить переход к точке *B*. Для этого нужно увеличить небазисную переменную $\boldsymbol{x}_2$ от исходного нулевого значения до значения, соответствующего точке *B*. в точке *B* переменная $\boldsymbol{s}_2$, которая была базисной в точке *A*, автоматически обращается в ноль и, следовательно, становится небазисной переменной. Таким образом, между множеством небазисных и базисных переменных происходит взаимообмен переменными $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{s}_2$. Этот процесс можно представить в виде таблицы.

Экстремальная точка	Нулевые переменные	Ненулевые переменные
A	$\boldsymbol{x}_1$, $\underline{\boldsymbol{x}_2}$	$\boldsymbol{s}_1$, $\underline{\boldsymbol{s}_2}$, $\boldsymbol{s}_3$, $\boldsymbol{s}_4$
B	$\boldsymbol{x}_1$, $\underline{\boldsymbol{s}_2}$	$\boldsymbol{s}_1$, $\underline{\boldsymbol{x}_2}$, $\boldsymbol{s}_3$, $\boldsymbol{s}_4$

Применяя аналогичную процедуру ко всем экстремальным точкам, можно убедиться в том, что любую последующую экстремальную точку всегда можно определить путем взаимной замены по одной переменной в составе базисных и небазисных предыдущей смежной точки. Этот фактор упрощает реализацию процедур симплекс-метода.

Рассмотренный процесс взаимной замены переменных приводит к необходимости введения двух новых терминов. **Включаемой переменной** называется небазисная в данный момент переменная, которая включена в множество базисных переменных на следующей итерации (при переходе к смежной экстремальной точке**). Исключаемая переменная** - это та базисная переменная, которая на следующей итерации подлежит исключению из множества базисных переменных.

Симплекс-алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 0. Используя линейную модель стандартной формы, определяют **начальное допустимой базисное решение** путем приравнивания к нулю $\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{m}$ (небазисных) переменных.

Шаг 1. Из числа текущих небазисных (равных нулю) переменных выбирается **включаемая в новый базис переменная**, увеличение которой обеспечивает улучшение значения целевой функции.

Если такой переменной нет, вычисления прекращаются, так как текущее базисное решение оптимально.

В противном случае осуществляется переход к шагу 2.

Шаг 2. из числа переменных текущего базиса выбирается **исключаемая переменная**, которая должна принять нулевое значение (стать небазисной) при введении в состав базисных новой переменной.

Шаг 3. Находится новое базисное решение, соответствующее новым составам небазисных и базисных переменных. Осуществляется переход к шагу 1.